

(ریاضی - سراسری ۸۹)

کج مثال ۲۰۴: مقدار $\int_0^\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \int_0^x \sin x \cos(\sin y) dy dx dz$ برابر است با:

(۴) $\pi \cos 1$

(۳) $\pi \sin 1$

(۲) $-\pi \cos 1$

(۱) $-\pi \sin 1$

پاسخ: گزینه «۳» ☒

$$\int_0^\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \int_0^x \sin x \cos(\sin y) dy dx dz \xrightarrow{\text{تعویض ترتیب انتگرال گیری}} \int_0^\pi dz \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \int_0^x \sin x \cos(\sin y) dy dx$$

$$= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \int_0^x \sin x \cdot \cos(\sin y) dx dy = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left[-\cos x \cos(\sin y) \right]_0^x dy = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos y \cos(\sin y) dy = \pi \sin(\sin y) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \pi \sin 1$$

کج مثال ۲۰۵: ناحیه D توسط رویه‌های $z = 8 - x^2 - y^2$ و $z = x^2 + 3y^2$ محصور شده است. کران‌های انتگرال سه‌گانه $\iiint_D f(x, y, z) dz dy dx$ را مشخص کنید.

پاسخ: ☒ با توجه به رویه‌های داده شده، واضح است که حدود z عبارتند از $z = 8 - x^2 - y^2$ و $z = x^2 + 3y^2$. اگر شکل را رسم نکرده باشیم، در حال حاضر نمی‌دانیم کدامیک از آن‌ها کران پایین و کدامیک کران بالاست. این مشکل را در ادامه حل خواهیم کرد. برای نوشتن کران‌های x و y از آن‌جا که هیچ‌کدام از رویه‌ها ناحیه‌ای در صفحه xy به ما نمی‌دهند، باید آن دو را برخورد دهیم و با حذف z، رابطه‌ای بین x و y پیدا کنیم.

$$\begin{cases} z = x^2 + 3y^2 \\ z = 8 - x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 4$$

معادله $x^2 + 2y^2 = 4$ نشان‌دهنده یک بیضی است. شعاع‌های افقی و عمودی این بیضی را تعیین می‌کنیم. به ازای $x = 0$ داریم $y = \pm\sqrt{2}$ و به ازای $y = 0$ داریم $x = \pm 2$. در نتیجه یک بیضی با شعاع عمودی $\sqrt{2}$ و شعاع افقی ۲ داریم. کران‌های x به صورت $-2 \leq x \leq 2$ هستند و برای کران‌های y از معادله بیضی $x^2 + 2y^2 = 4$ خواهیم داشت: $y = \pm\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}$ ، به عبارتی داریم:

$$-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{4-x^2}{2}}$$

اکنون وقت آن رسیده است که کران‌های بالا و پایین z را بهتر بشناسیم. یک نقطه از درون این بیضی انتخاب کنید. مثلاً نقطه‌ی $(x, y) = (0, 0)$ در این ناحیه قرار دارد. با جایگذاری آن در

$$\begin{cases} z = 8 - x^2 - y^2 = 8 \\ z = x^2 + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

کران‌های z داریم:

پس $z = 8 - x^2 - y^2$ کران بالا و $z = x^2 + 3y^2$ کران پایین است:

$$I = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} f(x, y, z) dz dy dx$$

(مواد و متالورژی - سراسری ۹۷)

کج مثال ۲۰۶: مقدار انتگرال $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dz dy dx$ کدام است؟

(۴) $\frac{46\pi}{35}$

(۳) $\frac{72\pi}{35}$

(۲) $\frac{92\pi}{35}$

(۱) $\frac{108\pi}{35}$

پاسخ: گزینه «۴» ☒ ابتدا انتگرال داخلی را محاسبه می‌کنیم:

$$I = \iint_D \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dz dy dx = \iint_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} (8-2(x^2+y^2)) dy dx$$

حالا ناحیه D را رسم می‌کنیم:

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، با یک نیم‌دایره روبه‌رو هستیم، پس با توجه به وجود عامل $x^2 + y^2$ در زیر انتگرال، بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم:

$$I = \iint_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} (8-2(x^2+y^2)) dy dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r^2)^{\frac{3}{2}} (8-2r^2) r dr d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (8r^{\frac{5}{2}} - 2r^{\frac{7}{2}}) dr d\theta = (\pi) \left(\frac{8r^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{2r^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{8}{\frac{5}{2}} - \frac{2}{\frac{7}{2}} \right) = \pi \left(\frac{16}{5} - \frac{4}{7} \right) = \pi \left(\frac{56-20}{35} \right) = \frac{46\pi}{35}$$

